Méthode de Delaunay

Beaucoup de travaux sur les méthodes de Delaunay notamment car l'on peut établir des résultats théoriques. (Attention à ne pas se perdre dans la littérature.)

Annabelle Collin et Cécile Dobrzynski

SCHÉMA GÉNÉRAL DE CONSTRUCTION D'UN MAILLAGE

I) Méthodes frontale et de Delaunay

1. Paramétrisation du maillage
   a. Description géométrique
   b. Taille des éléments …
2. Discrétisation du bord
3. Création de points intérieurs au domaine

II) Méthode Quadtree - Octree

1. Création d'une boîte englobante
2. Création d'un arbre par rapport à un critère géométrique et/ou une spécification des tailles requises
3. Équilibrage d'un arbre
4. Création d'un maillage à proprement parler

Ici : méthodes de Delaunay

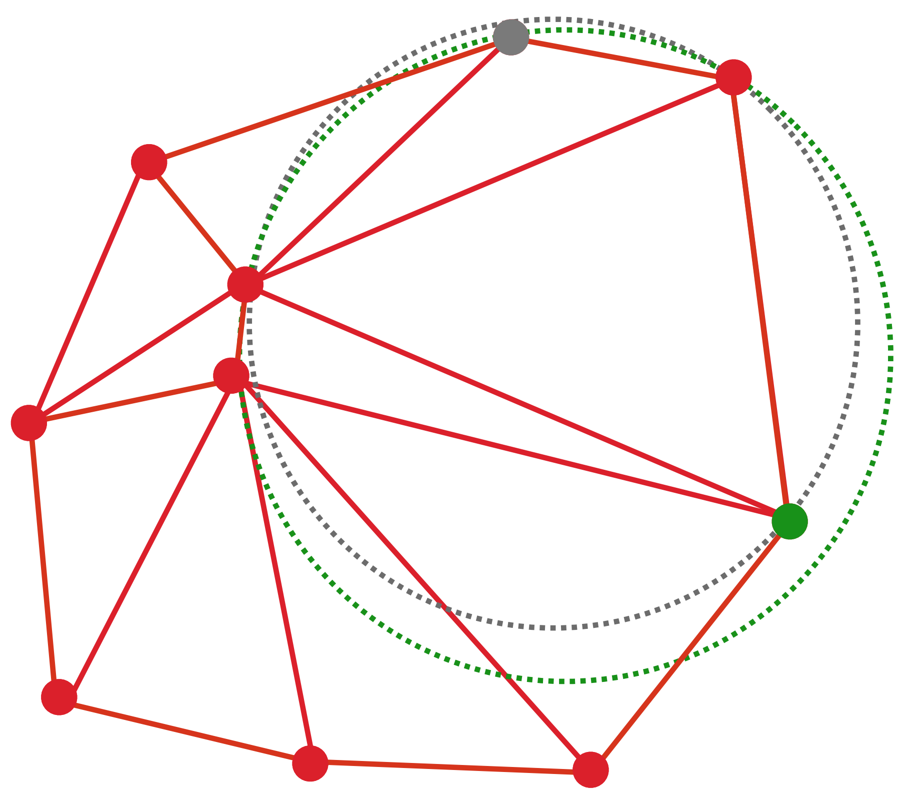
PREMIÈRE PARTIE :
TRIANGULATION DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ENSEMBLE DE POINTS

I) Qu'est ce qu'une triangulation de Delaunay ?

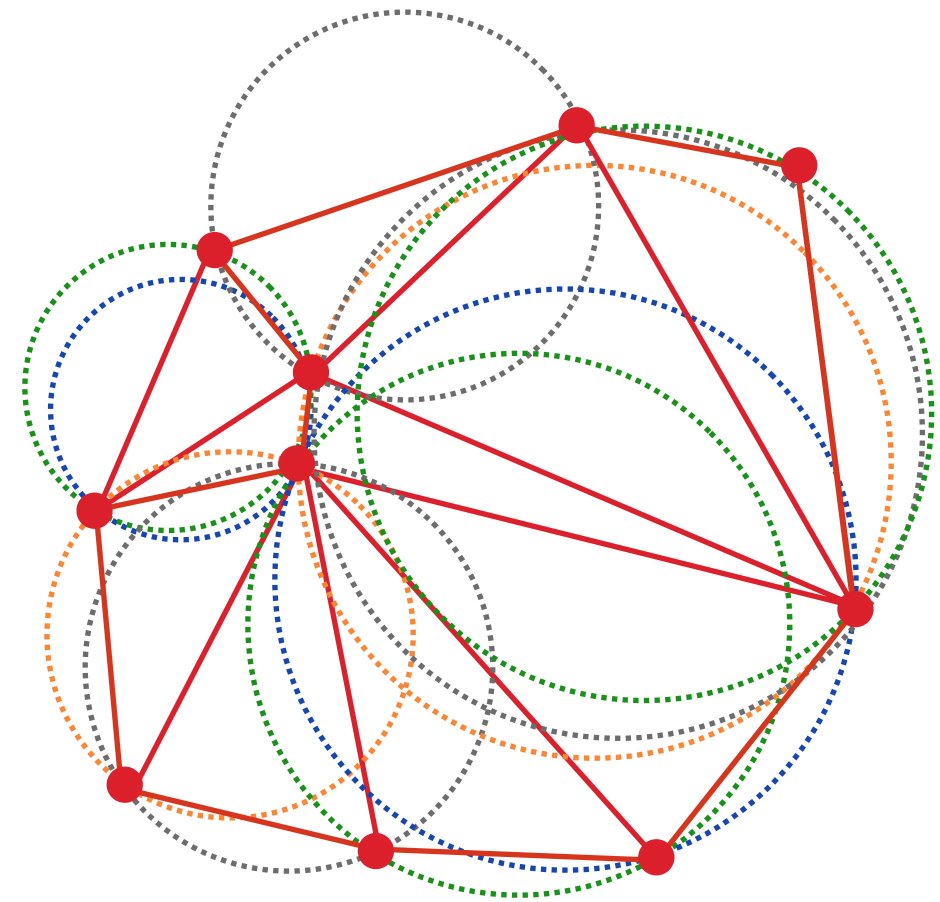
Critère de la boule vide : les boules ouvertes circonscrites aux sommets de la triangulation ne contiennent aucun sommet de la triangulation.

Définition : une triangulation respectant le critère de la boule vide est une triangulation de Delaunay.

Proposition : il y a unicité de la triangulation de Delaunay.



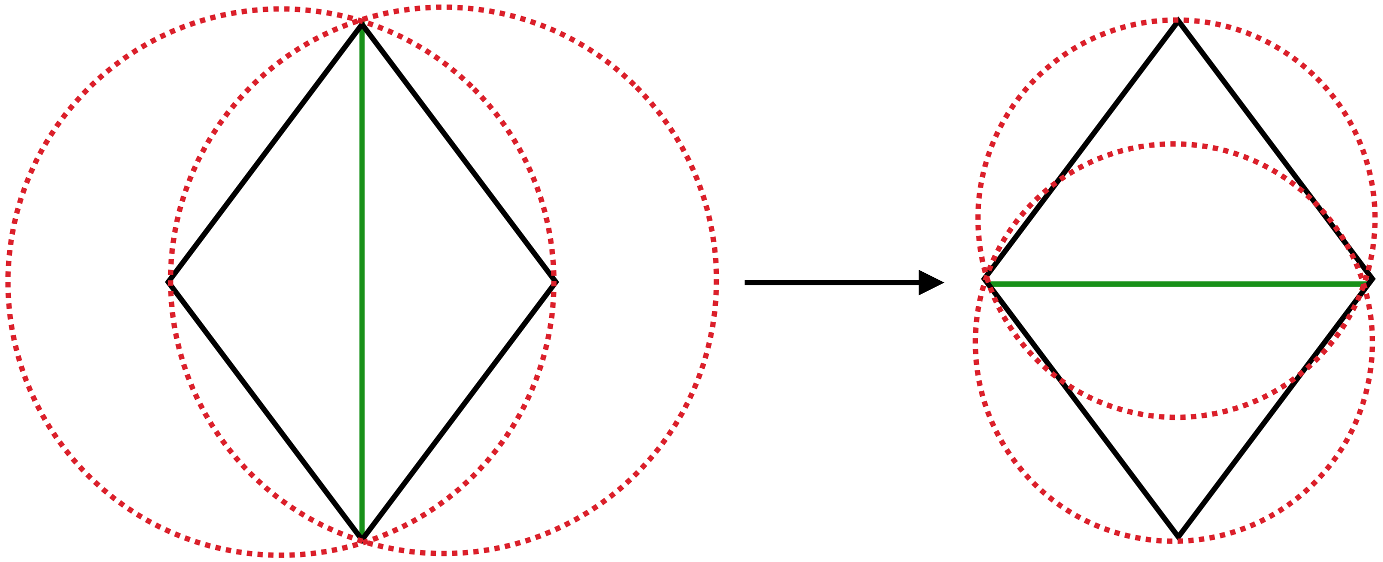
Triangulation quelconque



Triangulation de Delaunay

I) QU'EST CE QU'UNE TRIANGULATION DE DELAUNAY ?

Méthode du retournement : dans le cas d'un quadrilatère la méthode du retournement (méthode *flip*) permet d'obtenir une triangulation de Delaunay du quadrilatère.



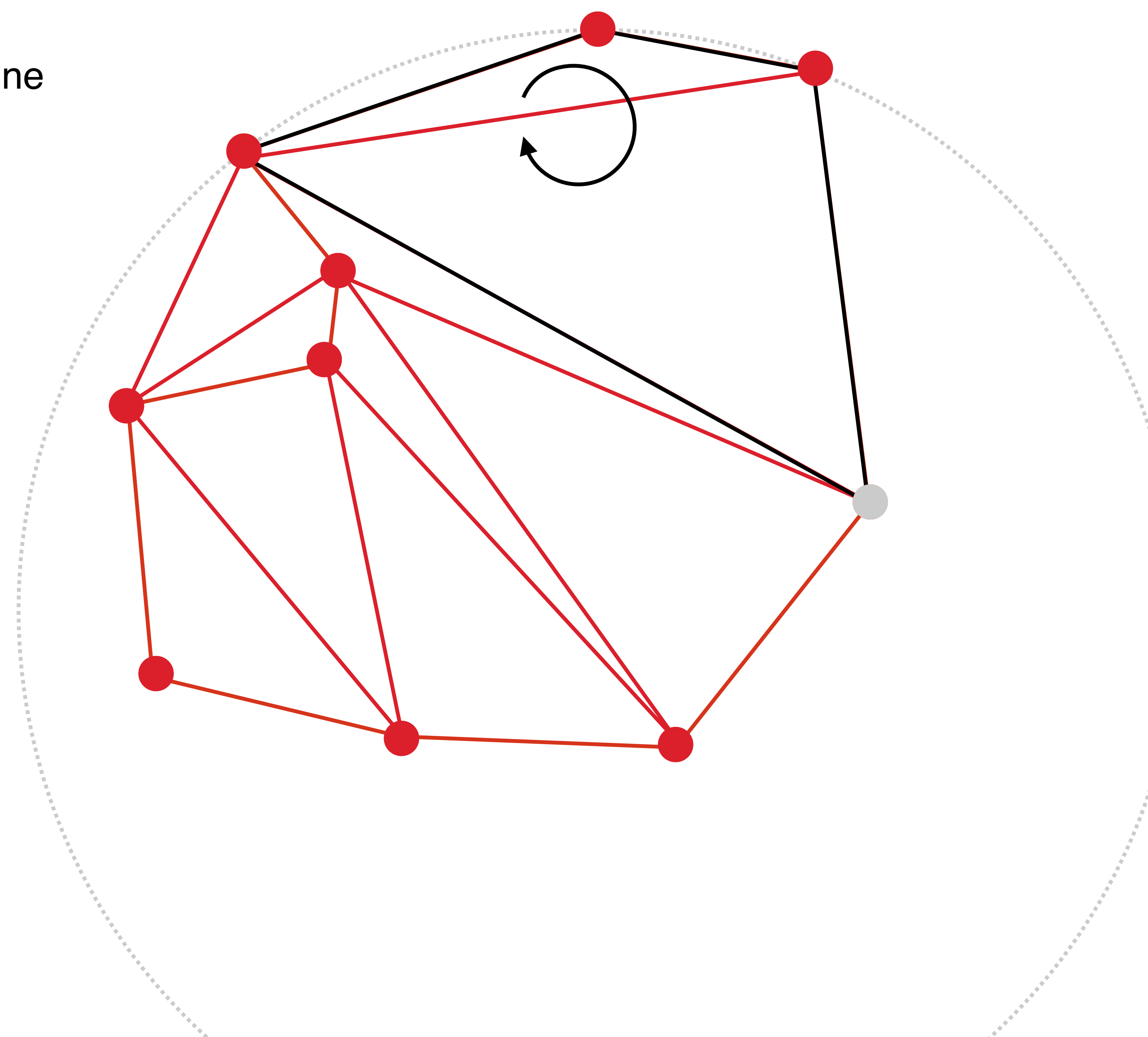
Lemme : Soit T une triangulation, si le critère de la boule vide est vrai pour chaque configuration de 2 éléments adjoints de T alors le critère est vrai partout et T est la triangulation de Delaunay.

II) MÉTHODE DU RETOURNEMENT POUR OBTENIR UNE TRIANGULATION DE DELAUNAY

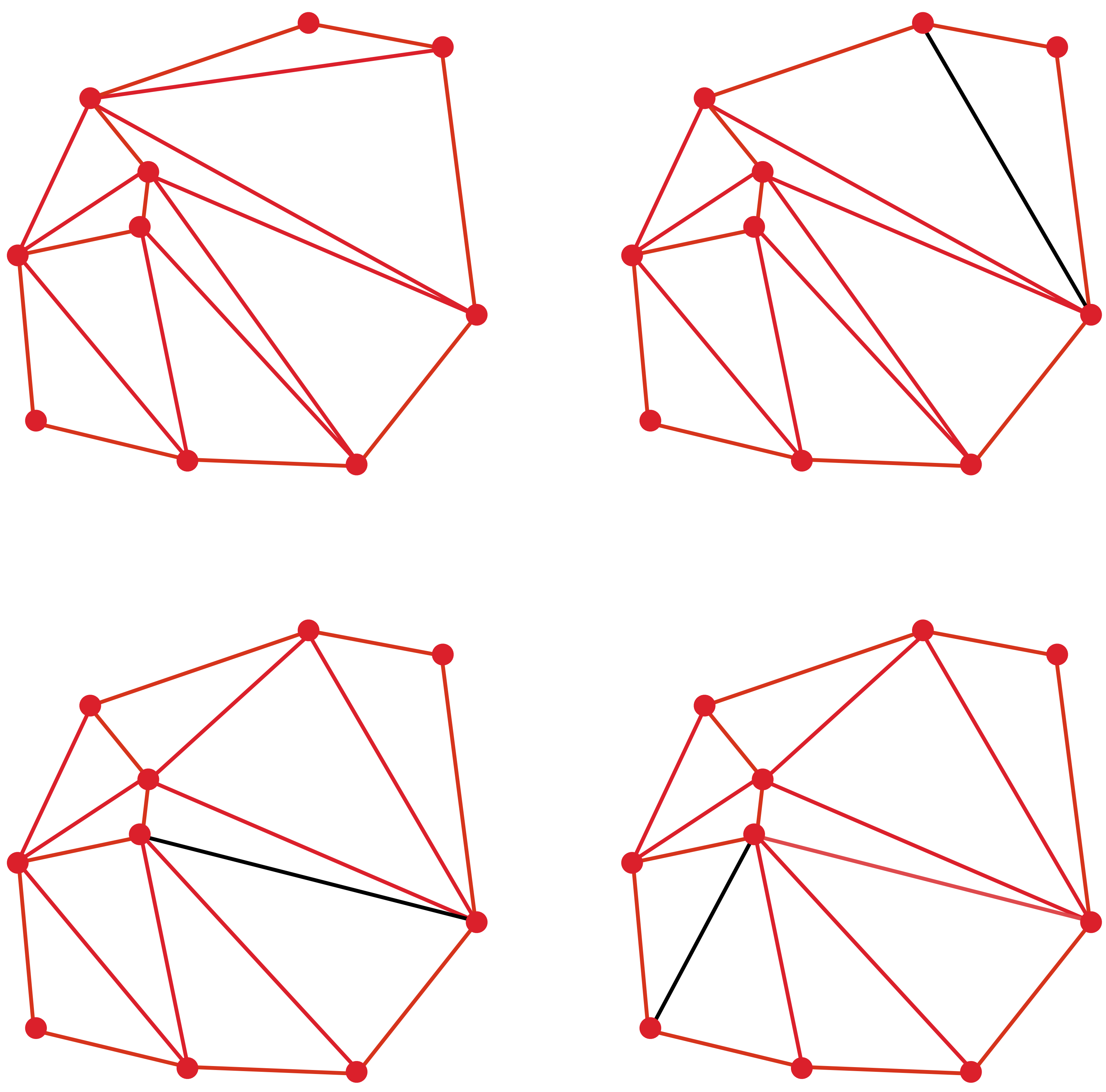
T est une triangulation quelconque.

Chercher un quadrilatère qui n'est pas une triangulation de Delaunay et retourner l'arête.

Continuer jusqu'à l'obtention de la triangulation de Delaunay …



II) MÉTHODE DU RETOURNEMENT POUR OBTENIR UNE TRIANGULATION DE DELAUNAY

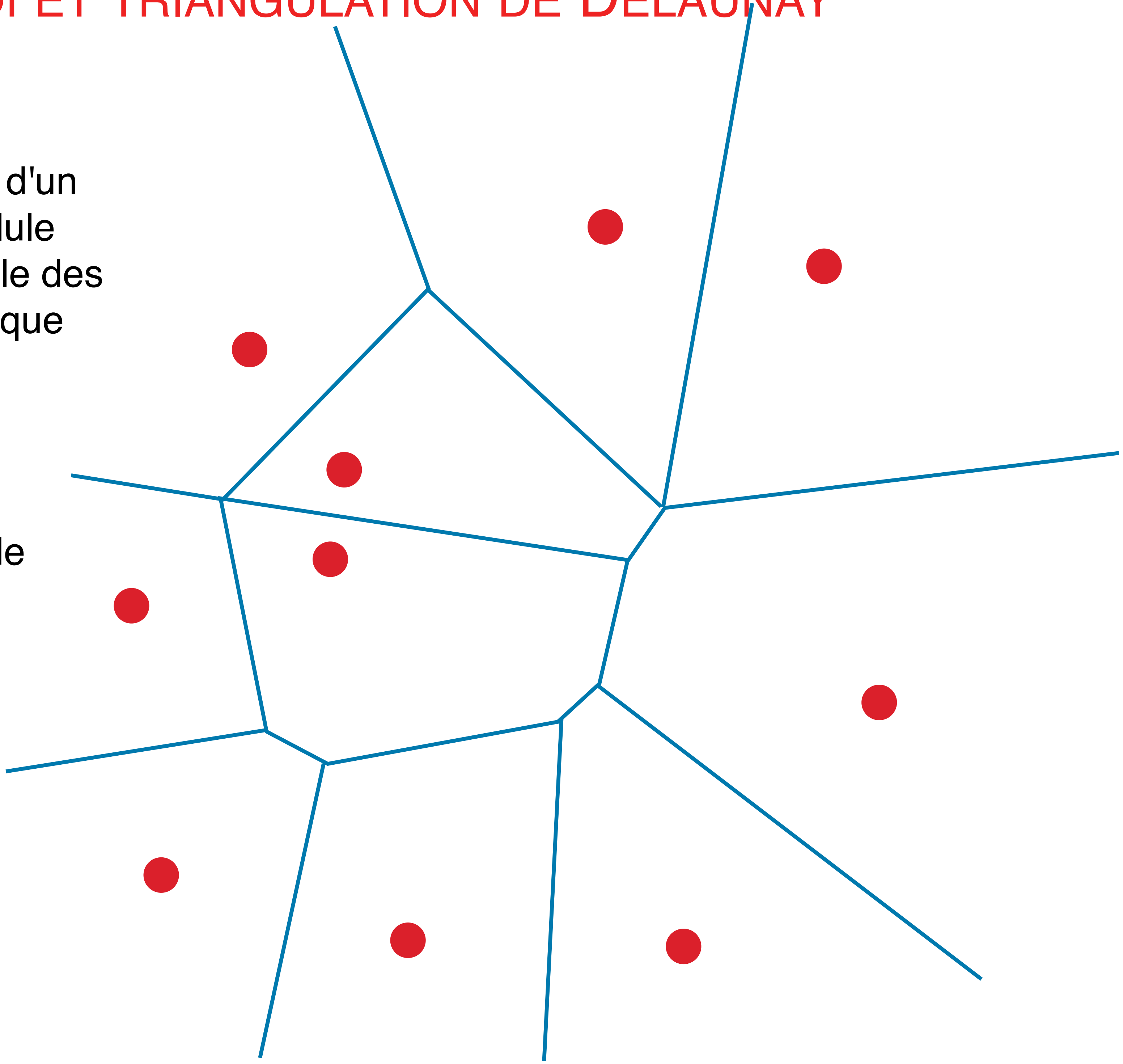


Une triangulation de Delaunay de l’**enveloppe convexe** des points initiaux a été obtenue.

III) Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay

Définition : Découpage du plan à partir d'un ensemble discret de points. Chaque cellule contient un seul point et forme l'ensemble des points du plan plus proches de ce point que de tous les autres.

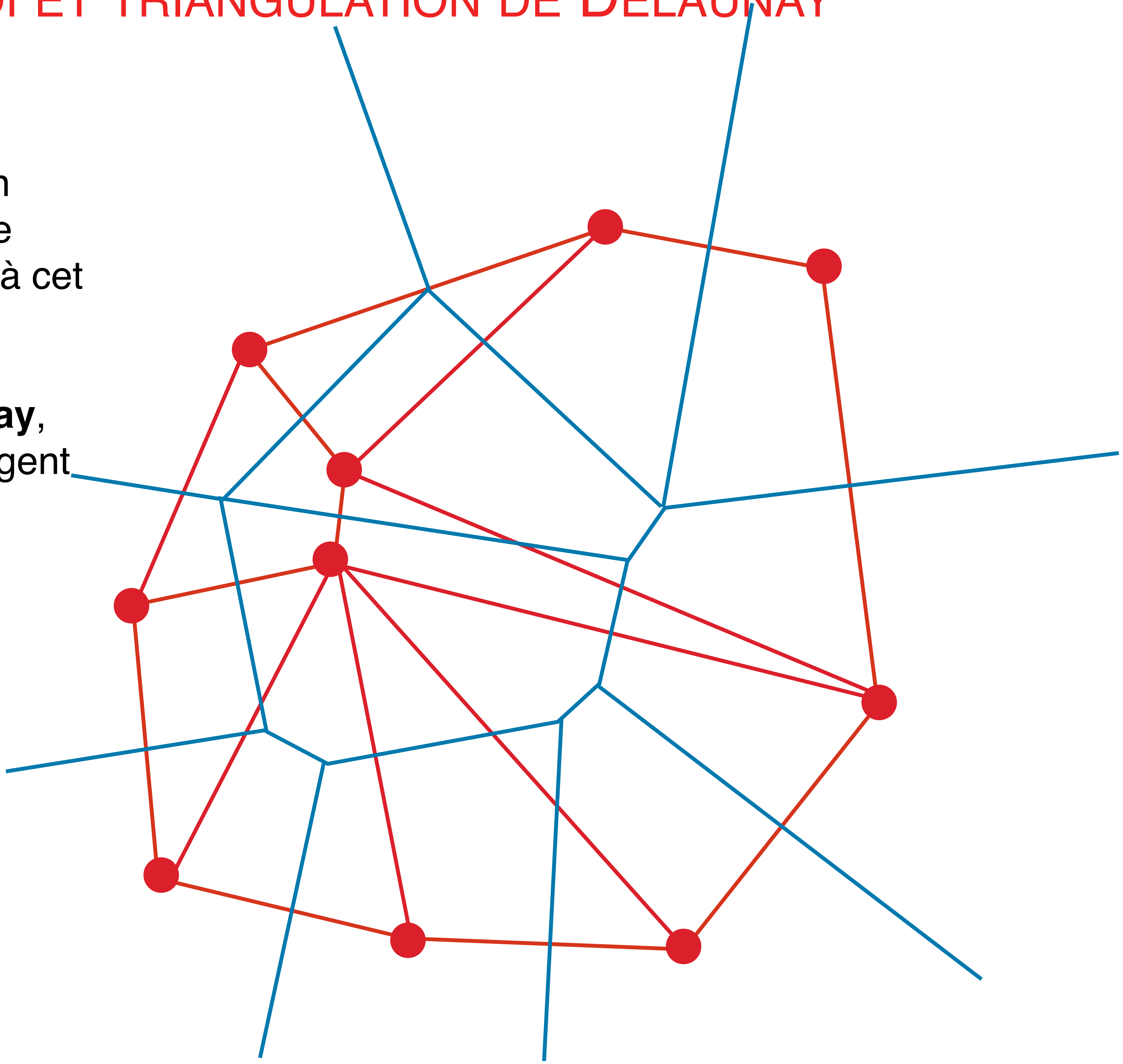
L'**algorithme de Fortune** est un des algorithmes permettant de construire le diagramme de Voronoï d'un ensemble de points.



III) Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay

Dual : La triangulation de Delaunay d'un ensemble discret de points est le graphe dual du diagramme de Voronoï associé à cet ensemble de points.

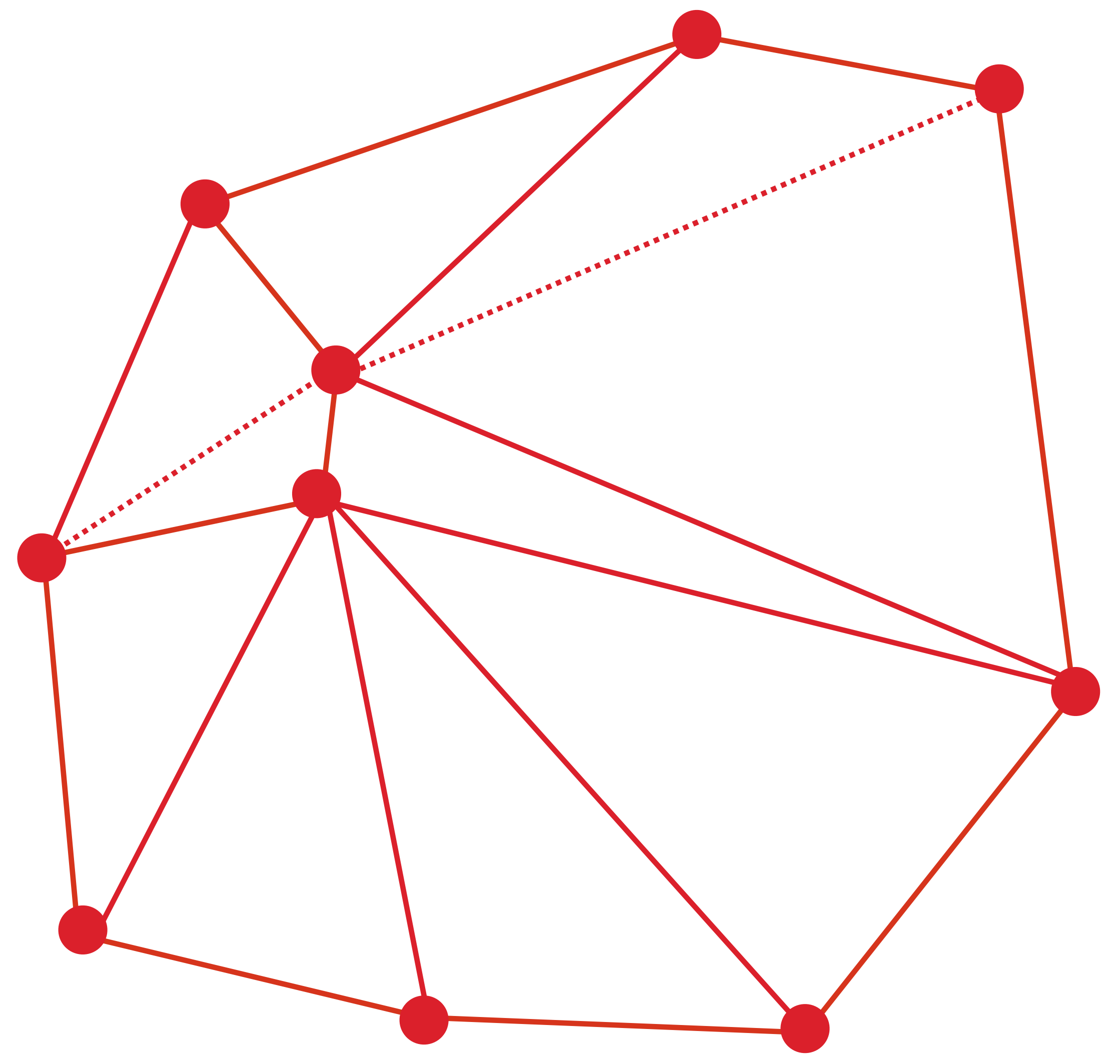
Pour obtenir un **découpage de Delaunay**, connecter entre eux les points qui partagent une arête du diagramme de Voronoï.



III) Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay

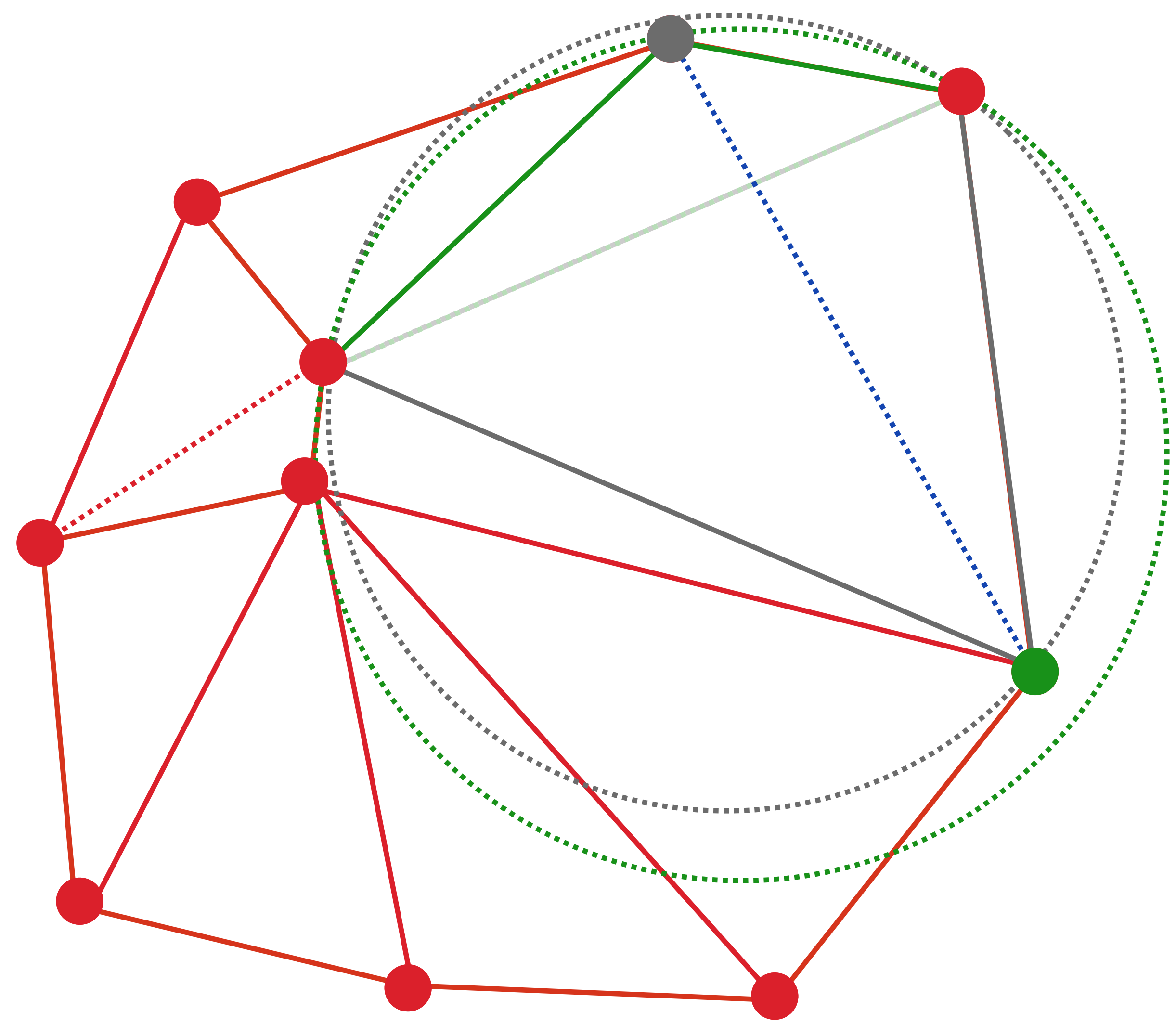
Pour rendre le maillage triangulaire, découper les polygones qui ne sont pas des triangles en triangles

Question : Ce maillage est-il de Delaunay ?
Non !



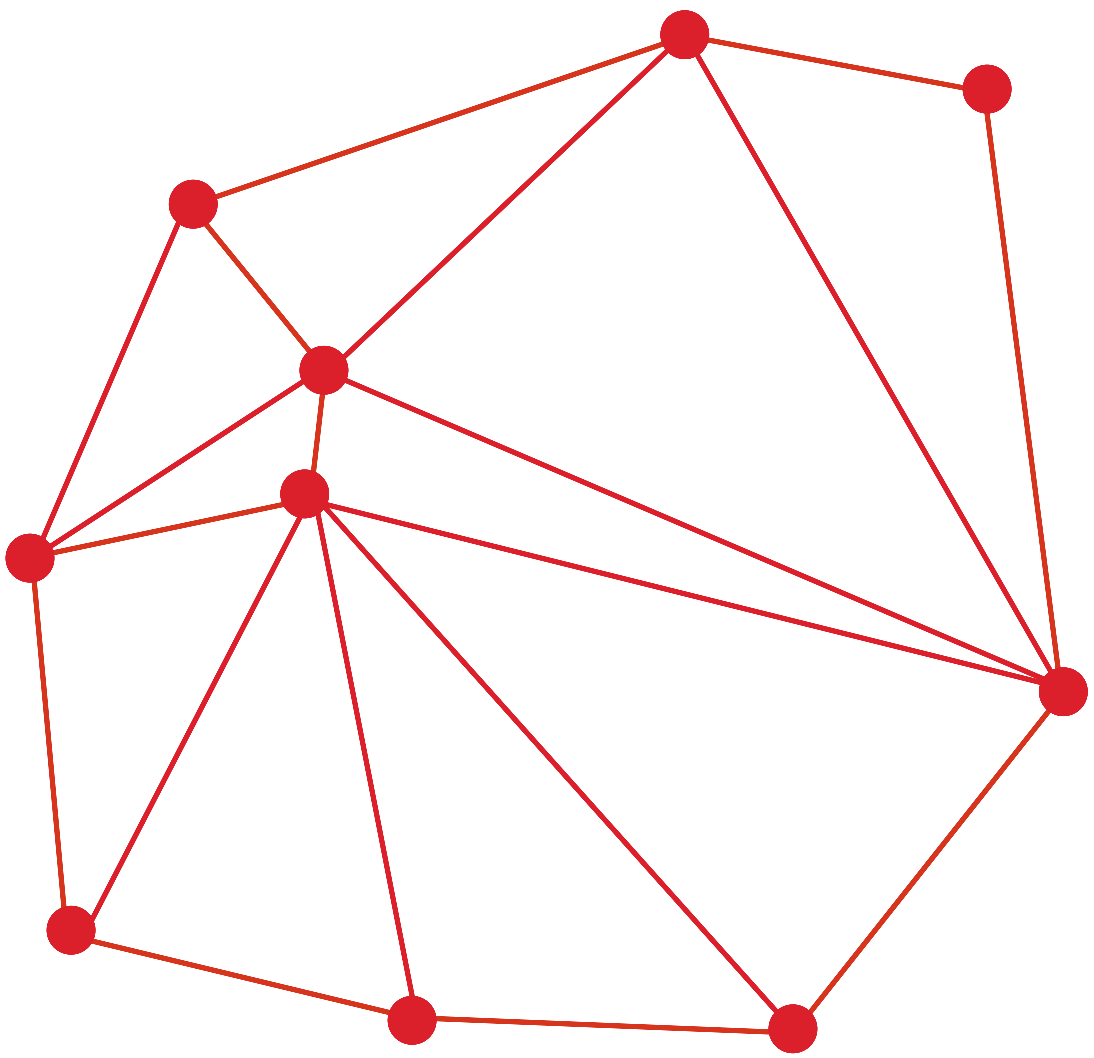
III) Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay

Utiliser l'algorithme de retournement pour obtenir une triangulation de Delaunay : basculer toutes les arêtes des quadrilatères n'étant pas des triangulations de Delaunay.



III) Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay

Une triangulation de Delaunay de l'**enveloppe convexe** des points initiaux a été obtenue.

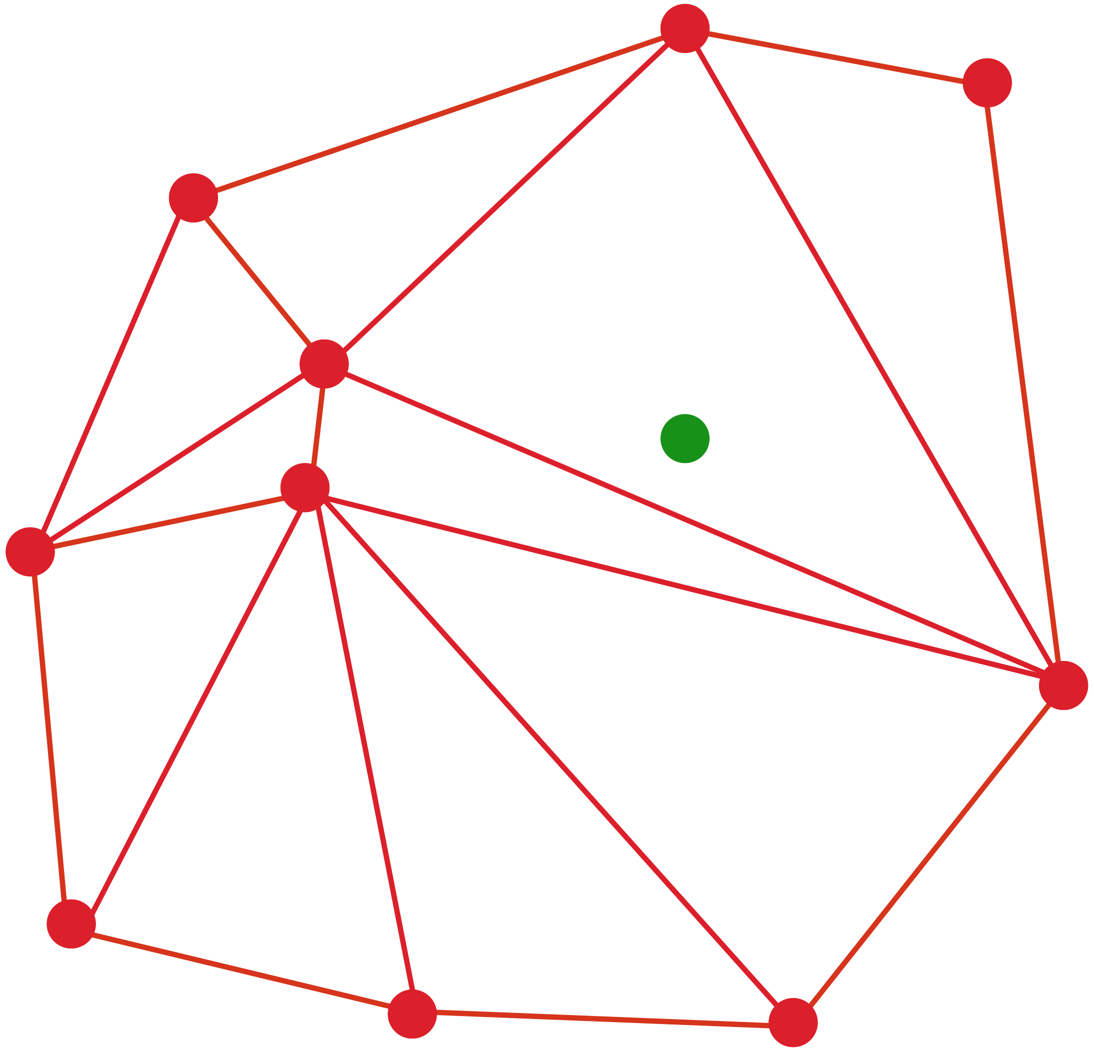


IV) Insertion de points dans une triangulation de Delaunay

Soit une triangulation de Delaunay d'une enveloppe convexe de points, l'objectif est d'insérer le point P (sur l'exemple en vert).

Par exemple pour **raffiner** le maillage suivant un critère de raffinement.

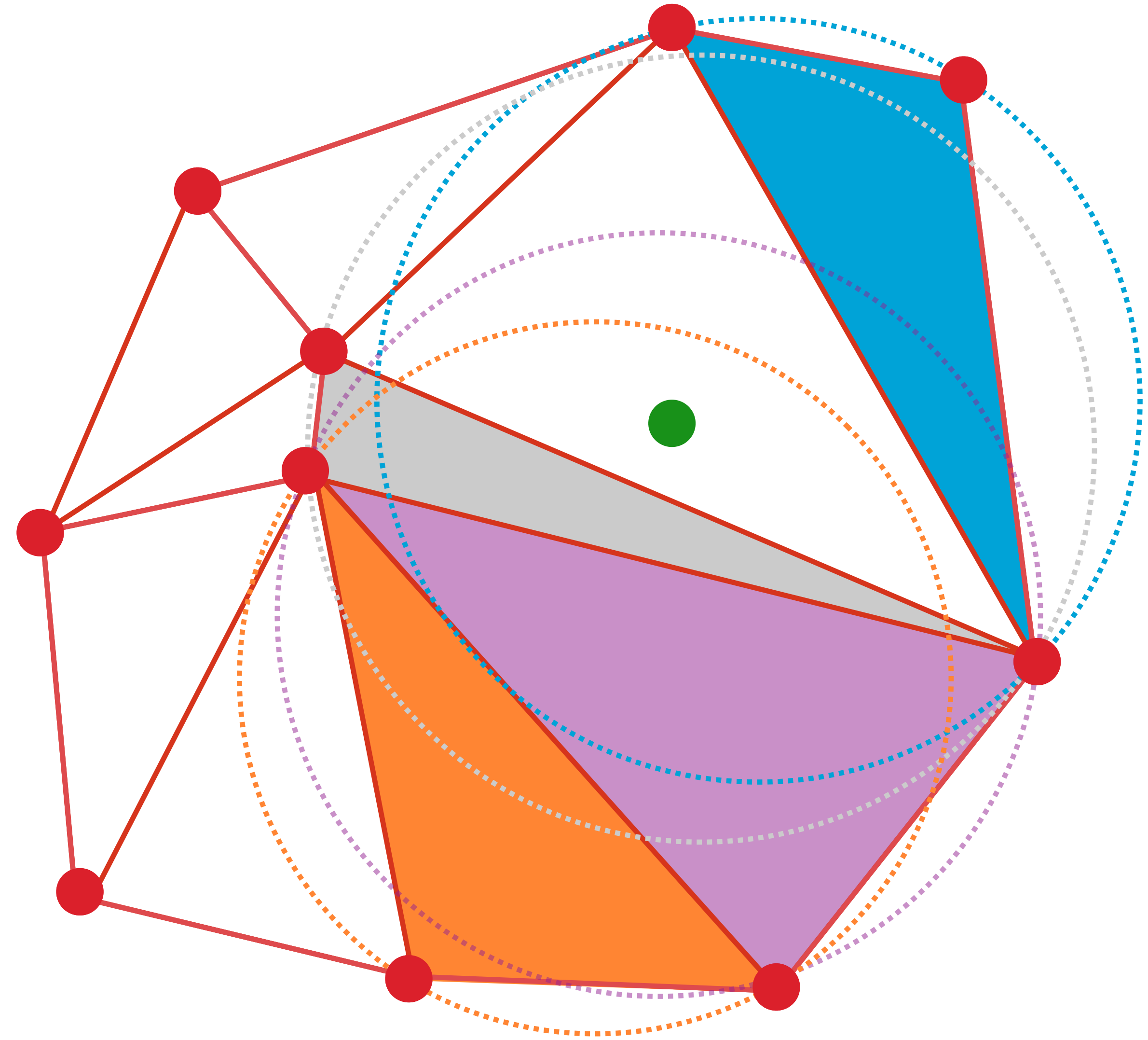
La méthode présentée ici est la méthode incrémentale :
$T_{i+1} = T_i - C_p + B_p$



IV) Insertion de points dans une triangulation de Delaunay

Méthode incrémentale : $T_{i+1} = T_i - C_p + B_p$

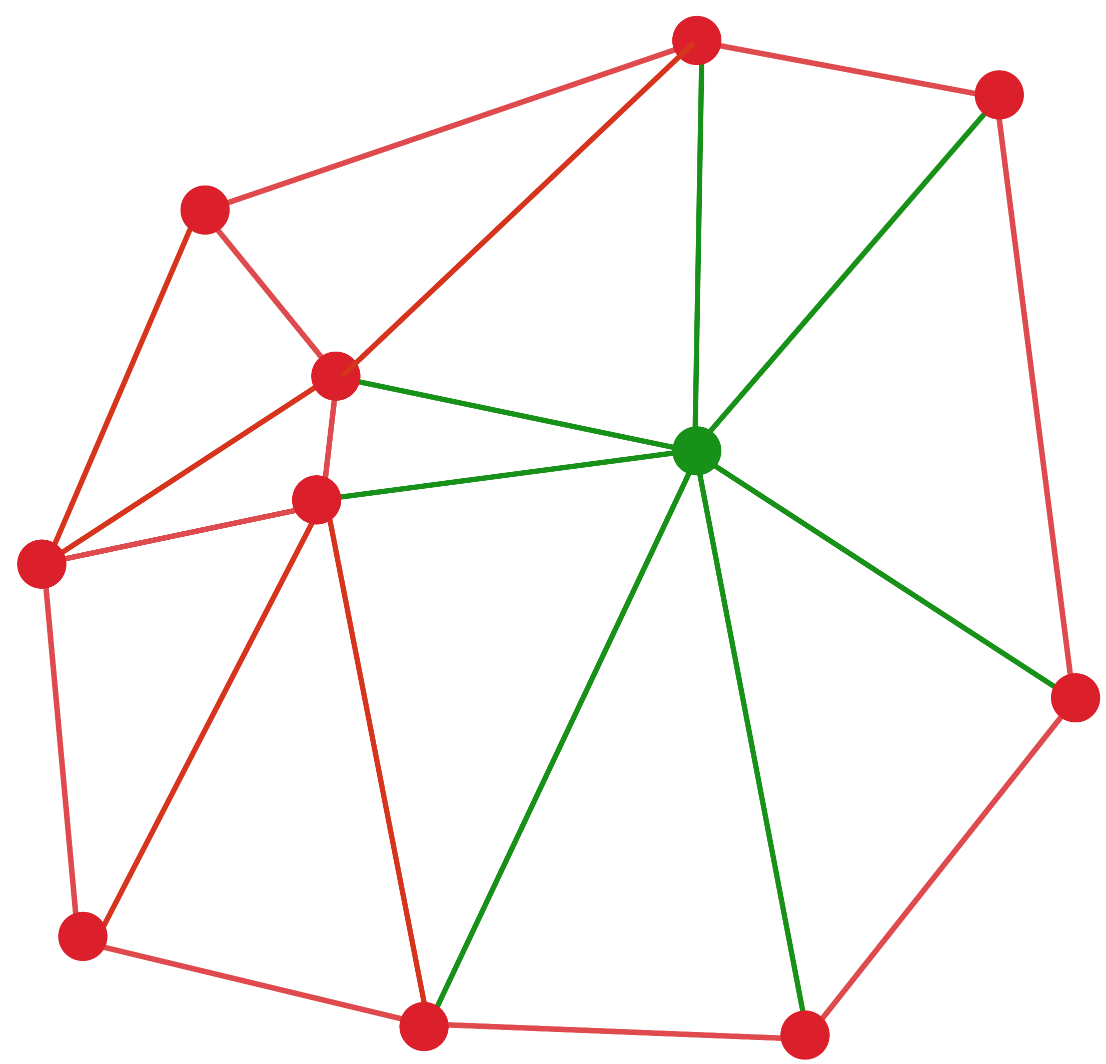
1) Retirer l’intérieur de la cavité C_p qui est l'ensemble des triangles dont le cercle circonscrit contient le point à insérer



IV) Insertion de points dans une triangulation de Delaunay

Méthode incrémentale : $T_{i+1} = T_i - C_p + B_p$

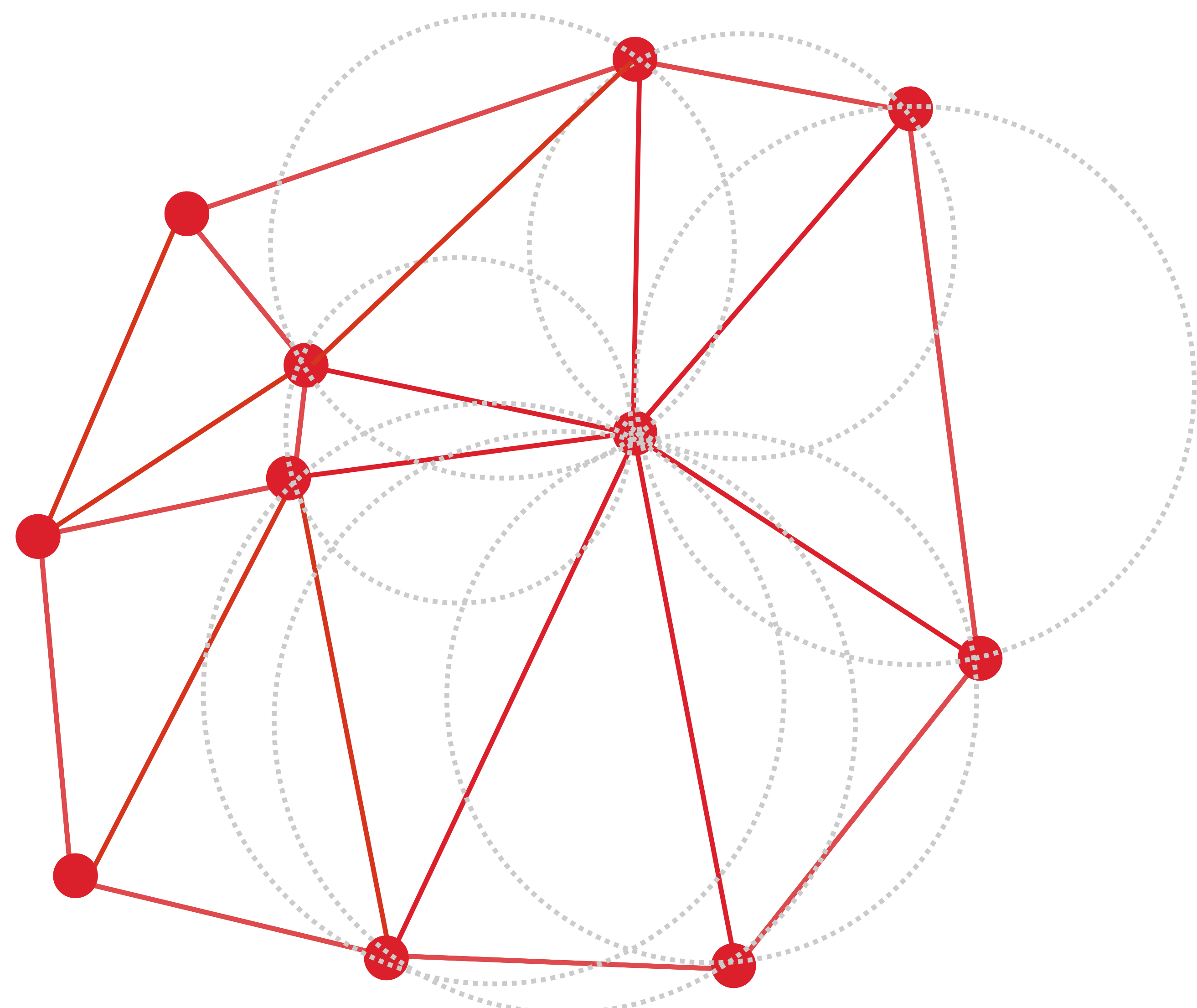
2) Construire la boule B_p qui est l'ensemble des éléments formés en joignant le point à insérer aux arêtes externes de la cavité C_p



IV) Insertion de points dans une triangulation de Delaunay

Méthode incrémentale : $T_{i+1} = T_i - C_p + B_p$

Théorème : Si T_i est une triangulation de Delaunay alors T_{i+1} construit par la méthode incrémentale est une triangulation de Delaunay.



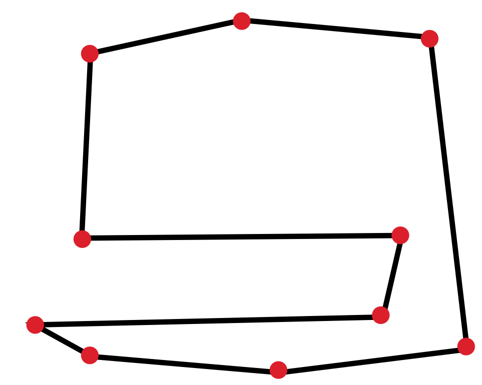
Deuxième partie :
Triangulation de Delaunay contrainte

I) Présentation de la problématique

II) Forçage d'arêtes

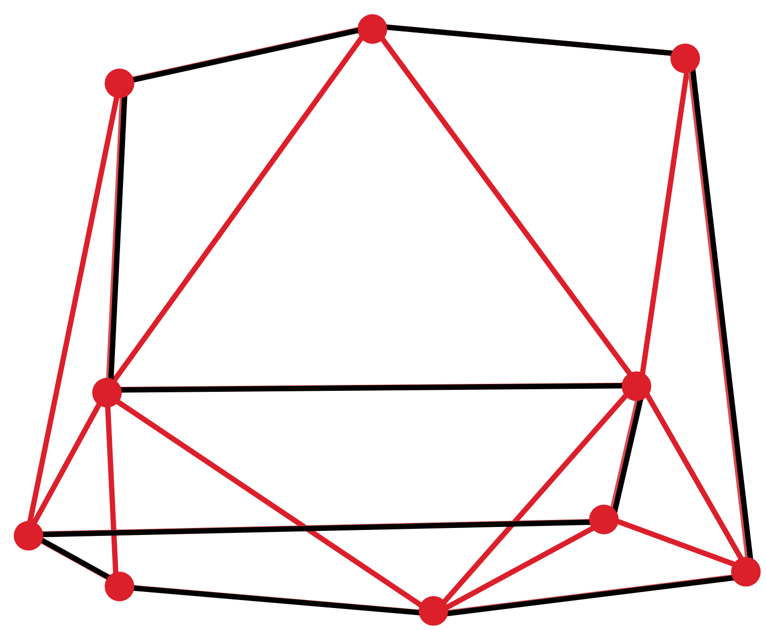
III) Triangulation de Delaunay (contrainte) pour une géométrie non convexe

I) PRÉSENTATION DE LA PROBLÉMATIQUE

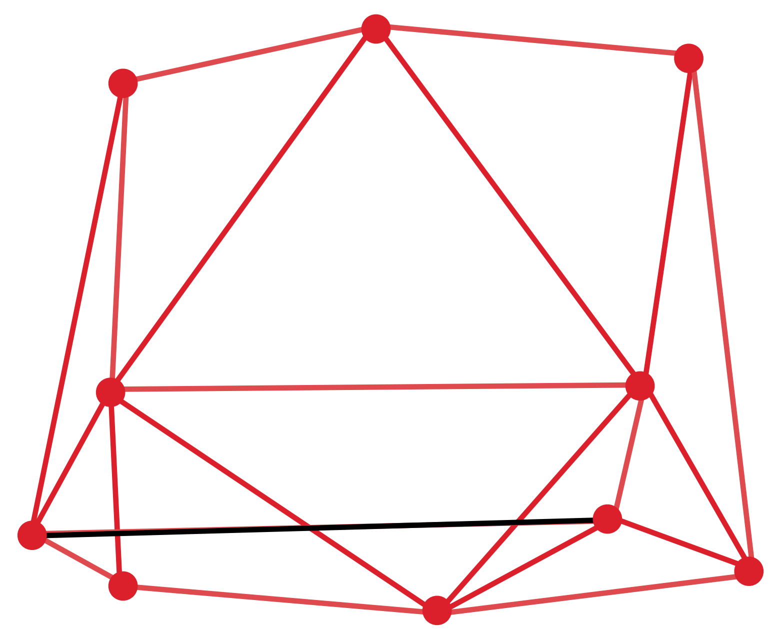


Objectif : retrouver dans notre triangulation finale un certain nombre d'entités

Ex : on a un ensemble de segment délimitant notre domaine (formant une géométrie non convexe)



Triangulation de Delaunay
de l'enveloppe convexe



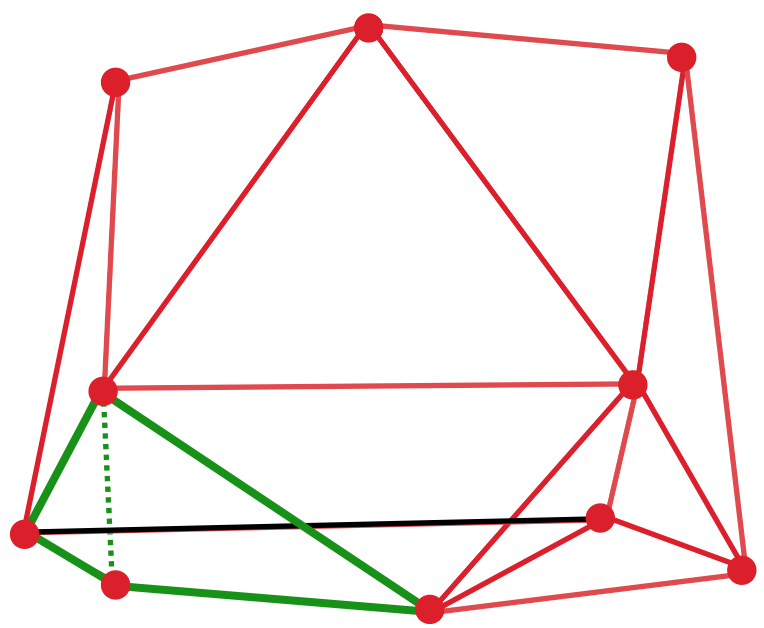
Entité à ajouter

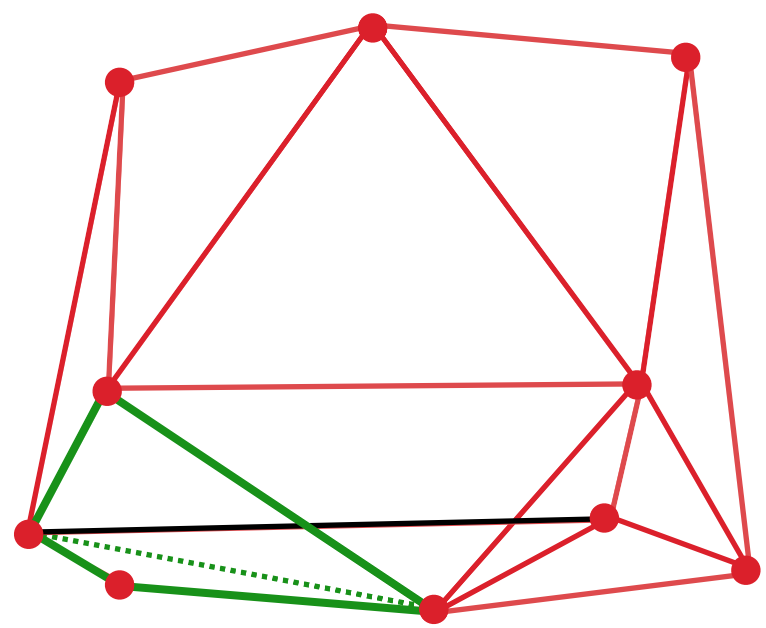
La triangulation finale ne sera plus de Delaunay, on parle de **triangulation de Delaunay contrainte** (c'est à dire que certains éléments ne vérifient pas le critère de Delaunay).

II) Forçage d'arêtes

Tant que toutes les arêtes à intégrer ne sont pas incluses dans le maillage, parcourir chaque arête n'appartenant pas encore au maillage.
Parcourir les quadrilatères dont la diagonale coupe l'arête

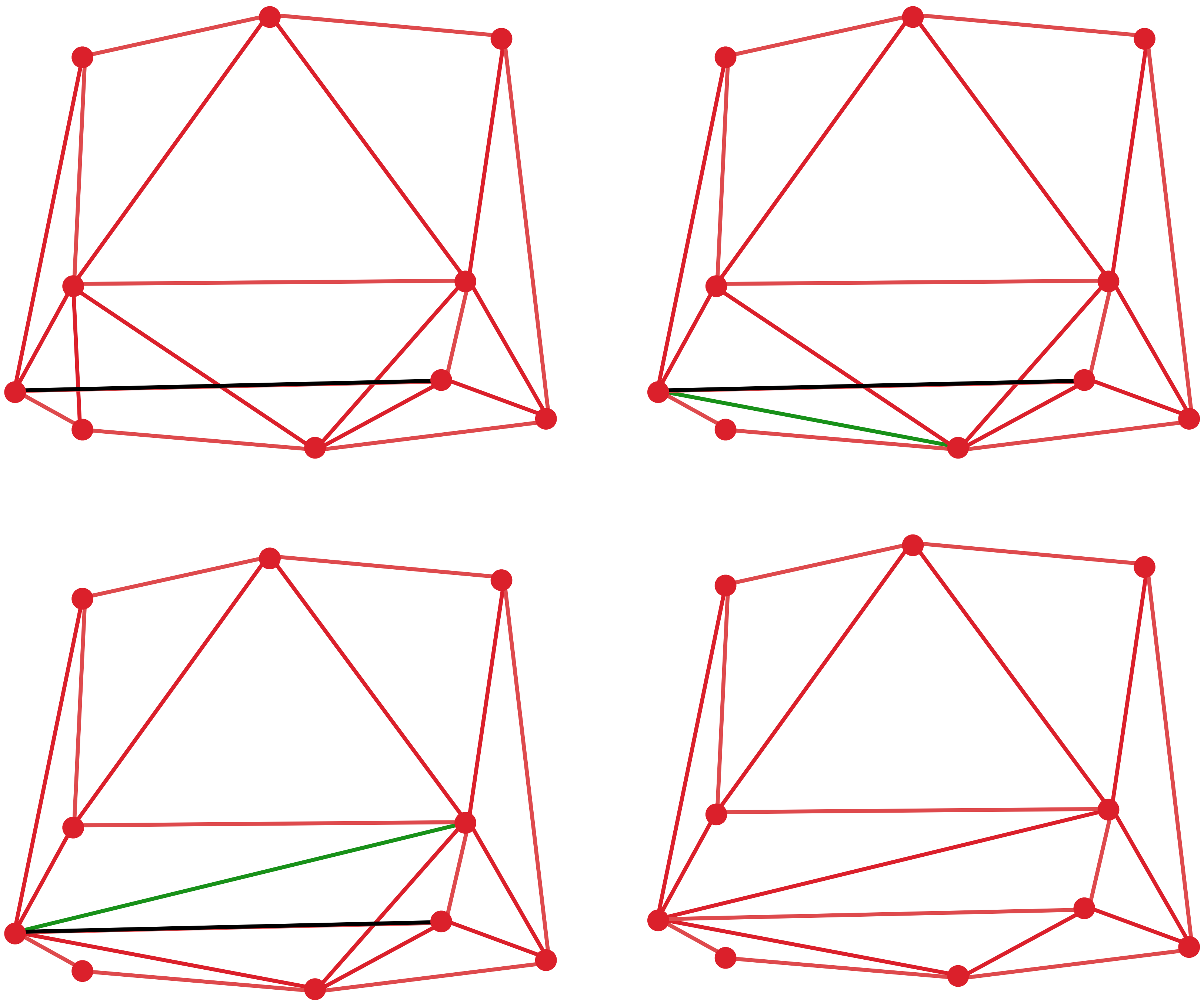
- Si l'arête ne coupe pas l'autre diagonale du quadrilatère (celle qui n'appartient pas au maillage) : Retournement de la diagonale du quadrilatère
- Si l'arête coupe l'autre diagonale du quadrilatère : Retournement de la diagonale du quadrilatère de manière aléatoire





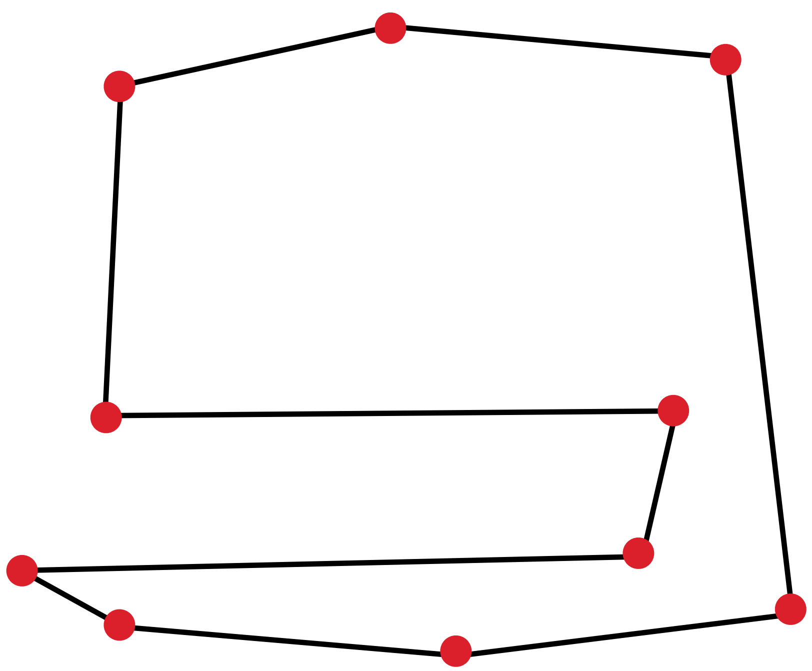
Théorème : l'algorithme converge mais la triangulation obtenue n'est pas unique.
Elle dépend de l'ordre dans lequel les arêtes sont parcourues.

II) Forçage d'arêtes

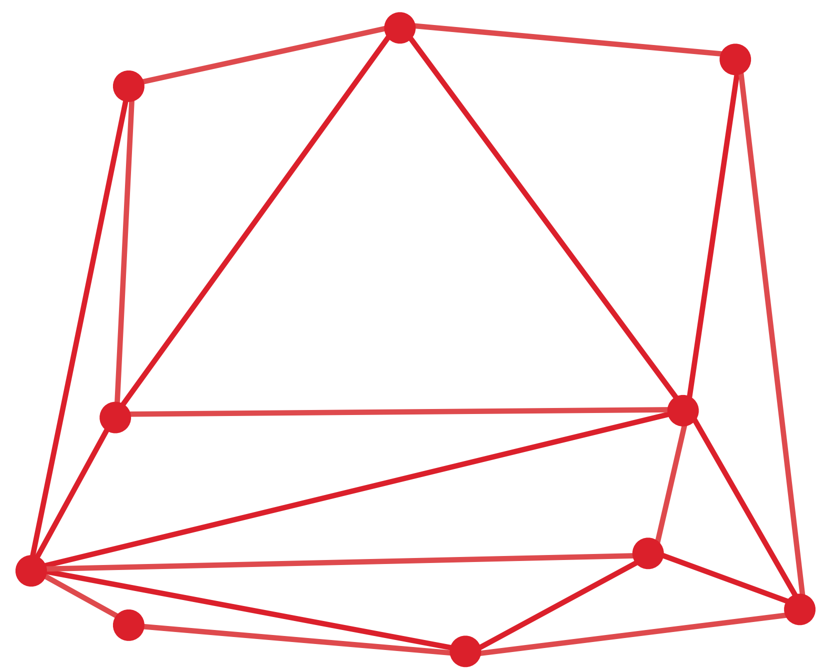


III) Triangulation de Delaunay (contrainte) pour une géométrie non convexe

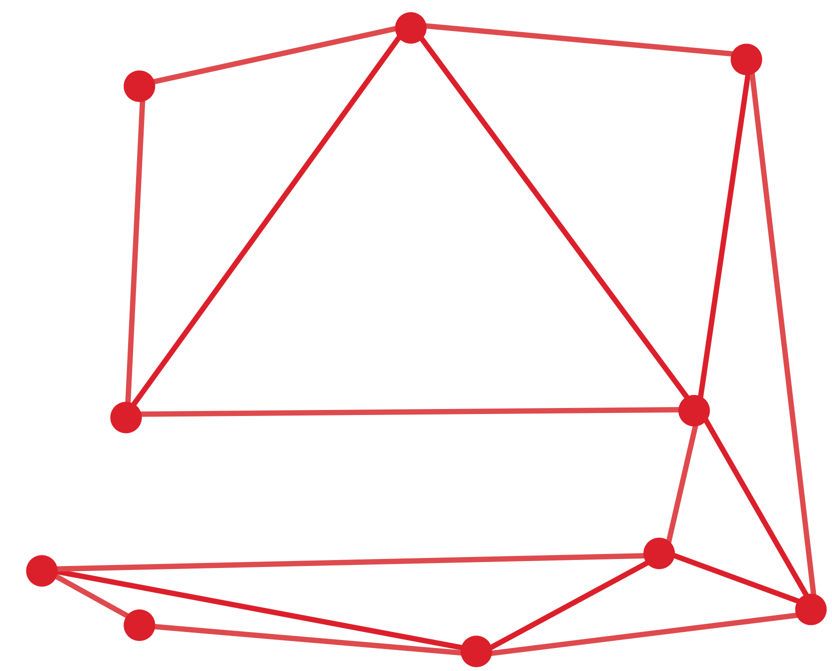
Il suffit de supprimer les triangles extérieurs



Géométrie à mailler



Triangulation contrainte de Delaunay

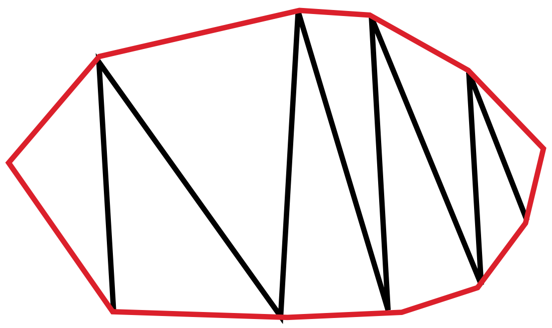


Triangulation de Delaunay
(cas non convexe)

Troisième partie
Algorithme

En entrée :

- un ensemble de points et les arêtes qui les relient
- si plusieurs contours : avoir des références différentes pour les points
- une taille maximum d'arêtes (ou alors la taille maximum sera définie par les arêtes déjà données)



Étape 1 : Maillage de Delaunay

- construire l'enveloppe convexe de l'ensemble de points donnés
- trianguler cette enveloppe convexe sans ajouter de points
- faire de cette triangulation une triangulation de Delaunay (retournement d'arêtes)
- ajouter les points donnés en entrée qui ne sont pas l'enveloppe convexe en conservant une triangulation de Delaunay
- raffiner cette triangulation en ajoutant de nouveaux points définis comme le centre du cercle circonscrit aux éléments trop grands

Étape 2 : Maillage contraint de Delaunay

- chercher les arêtes données en entrée qui ne sont pas dans la triangulation finale et suivre l'algorithme présenté précédemment

Étape 3 : **Supprimer les triangles extérieurs**

- nécessite de savoir ce qui est interne ou externe au maillage (ex : ref paire = interne, ref impaire = externe)

Quatrième partie
Difficultés, avantages et inconvénients de la méthode

I) Difficultés algorithmiques
- Implémenter une recherche rapide
- Passage d'un élément à son voisin
- Calcul du centre et de son rayon
- Mise à jour du maillage
- Forçage des frontières : dur en 3D

II) Avantages
- Pas d'hypothèses préliminaires (contrairement à la méthode frontale)
- Algorithme d'insertion performant
- Possibilité de varier les tailles

III) Inconvénients
- Forçage de la frontière
- Erreurs d'arrondi (pour savoir si des points sont dans le cercle circonscrit …)

	Robustesse	**Performance**	**Qualité**			**Préservation des frontières**
			Moy	**Min**	**Max**	
Quadtree	++	++ O(n)	++	++	-	Non
Delaunay	+	+ O(n log(n))	+	+	+	Oui
Frontal	-	- O(n log(n))	-	-	++	Oui

Pour récupérer des maillages et du code :
http://annabellecollin.perso.math.cnrs.fr/Mesh/MeshExamples.zip
http://annabellecollin.perso.math.cnrs.fr/Mesh/CodeInitial.zip